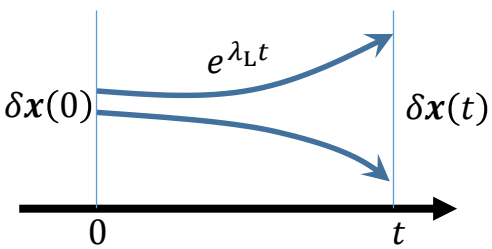
11. 量子リアプノフスペクトルおよび時間相関による量子多体系のカオス性の特徴づけ

京都大学理学研究科 手塚真樹

古典カオス系のとき

K個の自由度



$$M_{ab} = \frac{\delta x_a(t)}{\delta x_b(0)} = \{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$$

の特異値(昇順) $\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

$\lambda_K(t \to \infty)$: 通常の Lyapunov 指数

$\{\lambda_k(t)\}$の準位統計は多くの系で GOE に従う
(cf. ランダム帯行列の積)

(Hanada-Shimada-MT PRE 2018)

量子多体系への拡張

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT 1809.01671)

$\{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$ のかわりに $\widehat{M}_{ab}(t)$を(反)交換子とし

$$\widehat{L}_{ab}(t) = \sum_{j=1}^{N} \widehat{M}_{ja}(t)\widehat{M}_{jb}(t)$$

$(a, b, \ldots$: site index)を考える。
状態ϕに対し $\langle\phi|\widehat{L}_{ab}(t)|\phi\rangle$の特異値$\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$を求める。

量子リアプノフスペクトル(QLS):

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{2t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

例: Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型

$$\widehat{H} = \sum_{1\le a<b<c<d}^{N} J_{abcd}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b\hat{\chi}_c\hat{\chi}_d + i\sum_{1\le a<b}^{N} K_{ab}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b$$

$\hat{\chi}$: マヨラナフェルミオン

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: QLSの準位統計はGUEに従う

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: 準位統計はPoissonに近づく

2点関数の行列の場合

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT, in progress)

$$G_{ab}^{(\phi)} = \langle\phi|\hat{O}_a(t)\hat{O}_b(0)|\phi\rangle$$

特異値の対数の準位統計

例1: SYK 模型

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: いつもGUE

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: エネルギー固有状態については Poisson に近づく

例2: XXZ スピン鎖+ランダム磁場

$$\widehat{H} = \sum_{i}^{N} \widehat{\boldsymbol{S}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}_{i+1} + \sum_{i}^{N} h_i \widehat{S^z}_i$$

$$h_i \in [-W, W]$$

W小: エネルギー固有状態でGUE, スピン固有状態ではGOE

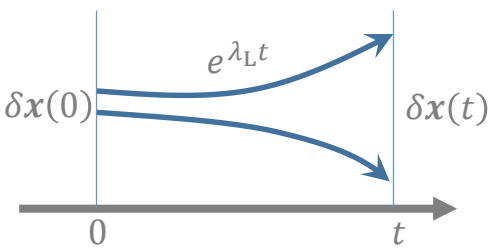
W大(MBL): Poisson に近づく

11. **量子リアプノフスペクトル**および時間相関による量子多体系のカオス性の特徴づけ

京都大学理学研究科 手塚真樹

古典カオス系のとき

K個の自由度



$$M_{ab} = \frac{\delta x_a(t)}{\delta x_b(0)} = \{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$$

の特異値(昇順) $\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

$\lambda_K(t \to \infty)$: 通常の Lyapunov 指数

$\{\lambda_k(t)\}$の準位統計は多くの系で GOE に従う
(cf. ランダム帯行列の積)

(Hanada-Shimada-MT PRE 2018)

量子多体系への拡張

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT 1809.01671)

$\{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$ のかわりに $\widehat{M}_{ab}(t)$を(反)交換子とし

$$\widehat{L}_{ab}(t) = \sum_{j=1}^{N} \widehat{M}_{ja}(t)\widehat{M}_{jb}(t)$$

$(a, b, \ldots$: site index)を考える。
状態ϕに対し $\langle\phi|\widehat{L}_{ab}(t)|\phi\rangle$の特異値$\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$を求める。

量子リアプノフスペクトル(QLS):

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{2t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

例: Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型

$$\widehat{H} = \sum_{1\le a<b<c<d}^{N} J_{abcd}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b\hat{\chi}_c\hat{\chi}_d + i\sum_{1\le a<b}^{N} K_{ab}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b$$

$\hat{\chi}$: マヨラナフェルミオン

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: QLSの準位統計はGUEに従う

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: 準位統計はPoissonに近づく

2点関数の行列の場合

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT, in progress)

$$G_{ab}^{(\phi)} = \langle\phi|\hat{O}_a(t)\hat{O}_b(0)|\phi\rangle$$

特異値の対数の準位統計

例1: SYK 模型

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: いつもGUE

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: エネルギー固有状態については Poisson に近づく

例2: XXZ スピン鎖+ランダム磁場

$$\widehat{H} = \sum_{i}^{N} \widehat{\boldsymbol{S}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}_{i+1} + \sum_{i}^{N} h_i \widehat{S^z}_i$$

$$h_i \in [-W, W]$$

W小: エネルギー固有状態でGUE, スピン固有状態ではGOE

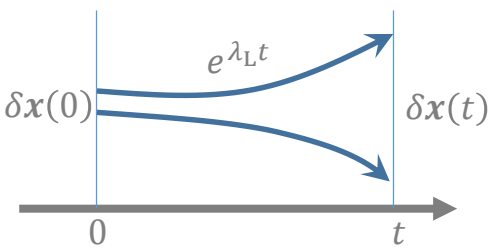
W大(MBL): Poisson に近づく

11. **量子リアプノフスペクトル**および時間相関による量子多体系のカオス性の特徴づけ

京都大学理学研究科 手塚真樹

古典カオス系のとき

K個の自由度



$$M_{ab} = \frac{\delta x_a(t)}{\delta x_b(0)} = \{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$$

の特異値(昇順) $\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

$\lambda_K(t \to \infty)$: 通常の Lyapunov 指数

$\{\lambda_k(t)\}$の準位統計は多くの系で GOE に従う
(cf. ランダム帯行列の積)

(Hanada-Shimada-MT PRE 2018)

量子多体系への拡張

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT 1809.01671)

$\{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$ のかわりに $\widehat{M}_{ab}(t)$を(反)交換子とし

$$\widehat{L}_{ab}(t) = \sum_{j=1}^{N} \widehat{M}_{ja}(t)\widehat{M}_{jb}(t)$$

$(a, b, \ldots$: site index)を考える。
状態ϕに対し $\langle\phi|\widehat{L}_{ab}(t)|\phi\rangle$の特異値$\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$を求める。

量子リアプノフスペクトル(QLS):

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{2t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

例: Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型

$$\widehat{H} = \sum_{1\le a<b<c<d}^{N} J_{abcd}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b\hat{\chi}_c\hat{\chi}_d + i\sum_{1\le a<b}^{N} K_{ab}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b$$

$\hat{\chi}$: マヨラナフェルミオン

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: QLSの準位統計はGUEに従う

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: 準位統計はPoissonに近づく

2点関数の行列の場合

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT, in progress)

$$G_{ab}^{(\phi)} = \langle\phi|\hat{O}_a(t)\hat{O}_b(0)|\phi\rangle$$

特異値の対数の準位統計

例1: SYK 模型

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: いつもGUE

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: エネルギー固有状態については Poisson に近づく

例2: XXZ スピン鎖+ランダム磁場

$$\widehat{H} = \sum_{i}^{N} \widehat{\boldsymbol{S}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}_{i+1} + \sum_{i}^{N} h_i \widehat{S^z}_i$$

$$h_i \in [-W, W]$$

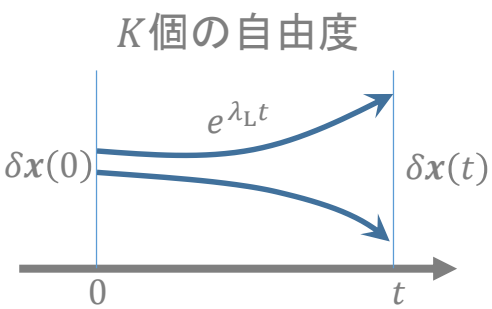
W小: エネルギー固有状態でGUE, スピン固有状態ではGOE

W大(MBL): Poisson に近づく

11. 量子リアプノフスペクトルおよび**時間相関**による量子多体系のカオス性の特徴づけ

京都大学理学研究科 手塚真樹

古典カオス系のとき



$$M_{ab} = \frac{\delta x_a(t)}{\delta x_b(0)} = \{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$$

の特異値(昇順) $\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

$\lambda_K(t \to \infty)$: 通常の Lyapunov 指数

$\{\lambda_k(t)\}$の準位統計は多くの系で GOE に従う
(cf. ランダム帯行列の積)

(Hanada-Shimada-MT PRE 2018)

量子多体系への拡張

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT 1809.01671)

$\{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$ のかわりに $\widehat{M}_{ab}(t)$を(反)交換子とし

$$\widehat{L}_{ab}(t) = \sum_{j=1}^{N} \widehat{M}_{ja}(t)\widehat{M}_{jb}(t)$$

$(a, b, \ldots$: site index)を考える。
状態ϕに対し $\langle\phi|\widehat{L}_{ab}(t)|\phi\rangle$の特異値$\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$を求める。

量子リアプノフスペクトル(QLS):

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{2t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

例: Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型

$$\widehat{H} = \sum_{1\le a<b<c<d}^{N} J_{abcd}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b\hat{\chi}_c\hat{\chi}_d + i\sum_{1\le a<b}^{N} K_{ab}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b$$

$\hat{\chi}$: マヨラナフェルミオン

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: QLSの準位統計はGUEに従う

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: 準位統計はPoissonに近づく

2点関数の行列の場合

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT, in progress)

$$G_{ab}^{(\phi)} = \langle\phi|\hat{O}_a(t)\hat{O}_b(0)|\phi\rangle$$

特異値の対数の準位統計

例1: SYK 模型

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: いつもGUE

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: エネルギー固有状態については Poisson に近づく

例2: XXZ スピン鎖+ランダム磁場

$$\widehat{H} = \sum_{i}^{N} \widehat{\boldsymbol{S}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}_{i+1} + \sum_{i}^{N} h_i \widehat{S^z}_i$$

$$h_i \in [-W, W]$$

W小: エネルギー固有状態でGUE, スピン固有状態ではGOE

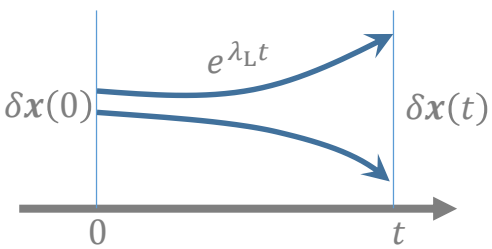
W大(MBL): Poisson に近づく

11. 量子リアプノフスペクトルおよび**時間相関**による量子多体系のカオス性の特徴づけ

京都大学理学研究科 手塚真樹

古典カオス系のとき

K個の自由度



$$M_{ab} = \frac{\delta x_a(t)}{\delta x_b(0)} = \{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$$

の特異値(昇順) $\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

$\lambda_K(t \to \infty)$: 通常の Lyapunov 指数

$\{\lambda_k(t)\}$の準位統計は多くの系で GOE に従う
(cf. ランダム帯行列の積)

(Hanada-Shimada-MT PRE 2018)

量子多体系への拡張

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT 1809.01671)

$\{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$ のかわりに $\widehat{M}_{ab}(t)$を(反)交換子とし

$$\widehat{L}_{ab}(t) = \sum_{j=1}^{N} \widehat{M}_{ja}(t)\widehat{M}_{jb}(t)$$

$(a, b, \ldots$: site index)を考える。
状態ϕに対し $\langle\phi|\widehat{L}_{ab}(t)|\phi\rangle$の特異値$\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$を求める。

量子リアプノフスペクトル(QLS):

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{2t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

例: Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型

$$\widehat{H} = \sum_{1\le a<b<c<d}^{N} J_{abcd}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b\hat{\chi}_c\hat{\chi}_d + i\sum_{1\le a<b}^{N} K_{ab}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b$$

$\hat{\chi}$: マヨラナフェルミオン

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: QLSの準位統計はGUEに従う

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: 準位統計はPoissonに近づく

2点関数の行列の場合

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT, in progress)

$$G_{ab}^{(\phi)} = \langle\phi|\hat{O}_a(t)\hat{O}_b(0)|\phi\rangle$$

特異値の対数の準位統計

例1: SYK 模型

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: いつもGUE

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: エネルギー固有状態については Poisson に近づく

例2: XXZ スピン鎖+ランダム磁場

$$\widehat{H} = \sum_{i}^{N} \widehat{\boldsymbol{S}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}_{i+1} + \sum_{i}^{N} h_i \widehat{S^z}_i$$

$$h_i \in [-W, W]$$

W小: エネルギー固有状態でGUE, スピン固有状態ではGOE

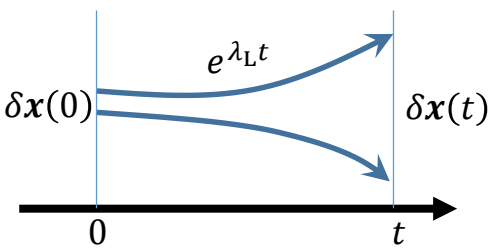
W大(MBL): Poisson に近づく

11. 量子リアプノフスペクトルおよび時間相関による量子多体系のカオス性の特徴づけ

京都大学理学研究科 手塚真樹

古典カオス系のとき

K個の自由度



$$M_{ab} = \frac{\delta x_a(t)}{\delta x_b(0)} = \{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$$

の特異値(昇順) $\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

$\lambda_K(t \to \infty)$: 通常の Lyapunov 指数

$\{\lambda_k(t)\}$の準位統計は多くの系で GOE に従う
(cf. ランダム帯行列の積)

(Hanada-Shimada-MT PRE 2018)

量子多体系への拡張

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT 1809.01671)

$\{x_a(t), p_b(0)\}_{\mathrm{PB}}$ のかわりに $\widehat{M}_{ab}(t)$を(反)交換子とし

$$\widehat{L}_{ab}(t) = \sum_{j=1}^{N} \widehat{M}_{ja}(t)\widehat{M}_{jb}(t)$$

$(a, b, \ldots$: site index)を考える。
状態ϕに対し $\langle\phi|\widehat{L}_{ab}(t)|\phi\rangle$の特異値$\{a_k(t)\}_{k=1}^{K}$を求める。

量子リアプノフスペクトル(QLS):

$$\left\{\lambda_k(t) \equiv \frac{\log a_k(t)}{2t}\right\}_{k=1,2,\ldots,K}$$

例: Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型

$$\widehat{H} = \sum_{1\le a<b<c<d}^{N} J_{abcd}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b\hat{\chi}_c\hat{\chi}_d + i\sum_{1\le a<b}^{N} K_{ab}\hat{\chi}_a\hat{\chi}_b$$

$\hat{\chi}$: マヨラナフェルミオン

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: QLSの準位統計はGUEに従う

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: 準位統計はPoissonに近づく

2点関数の行列の場合

(Gharibyan-Hanada-Swingle-MT, in progress)

$$G_{ab}^{(\phi)} = \langle\phi|\hat{O}_a(t)\hat{O}_b(0)|\phi\rangle$$

特異値の対数の準位統計

例1: SYK 模型

$\overline{J^2} \gg \overline{K^2}$: いつもGUE

$\overline{J^2} \ll \overline{K^2}$: エネルギー固有状態については Poisson に近づく

例2: XXZ スピン鎖+ランダム磁場

$$\widehat{H} = \sum_{i}^{N} \widehat{\boldsymbol{S}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}_{i+1} + \sum_{i}^{N} h_i \widehat{S^z}_i$$

$$h_i \in [-W, W]$$

W小: エネルギー固有状態でGUE, スピン固有状態ではGOE

W大(MBL): Poisson に近づく