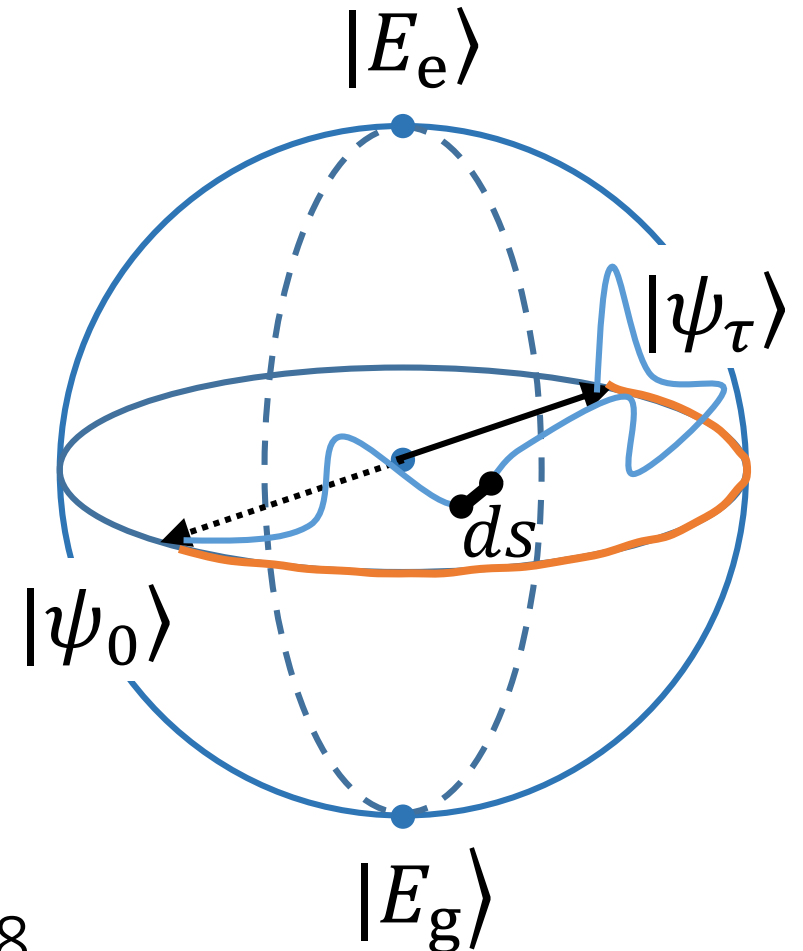


量子速度限界、断熱過程のショートカットと量子熱力学

布能 謙 (理研)

K. Funo, et al., PRL **118**, 100602 (2017)

K. Funo, N. Shiraishi, K. Saito, arXiv:1810.03011
(to appear in NJP)



目次

- 断熱過程のショートカット – Counter-Diabatic Driving –
- 量子速度限界 (Quantum speed limit)
- 最近の進展
 - Counter-Diabatic Drivingのspeed limit
 - 量子開放系のspeed limit

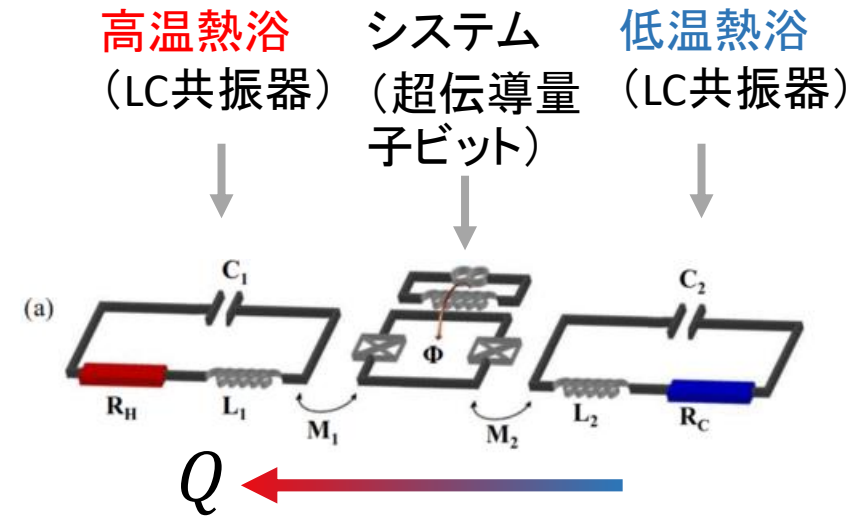
操作時間と効率の間のトレードオフ関係

- 量子断熱計算
(量子アニーリング)



<http://dwavejapan.com/>

- 量子熱機関・冷却機関



B. Karimi, J. Pekola, PRB (2016)

効率を高くするためには断熱的(ゆっくりとした)操作が必要

2準位系を使ったトレードオフの例

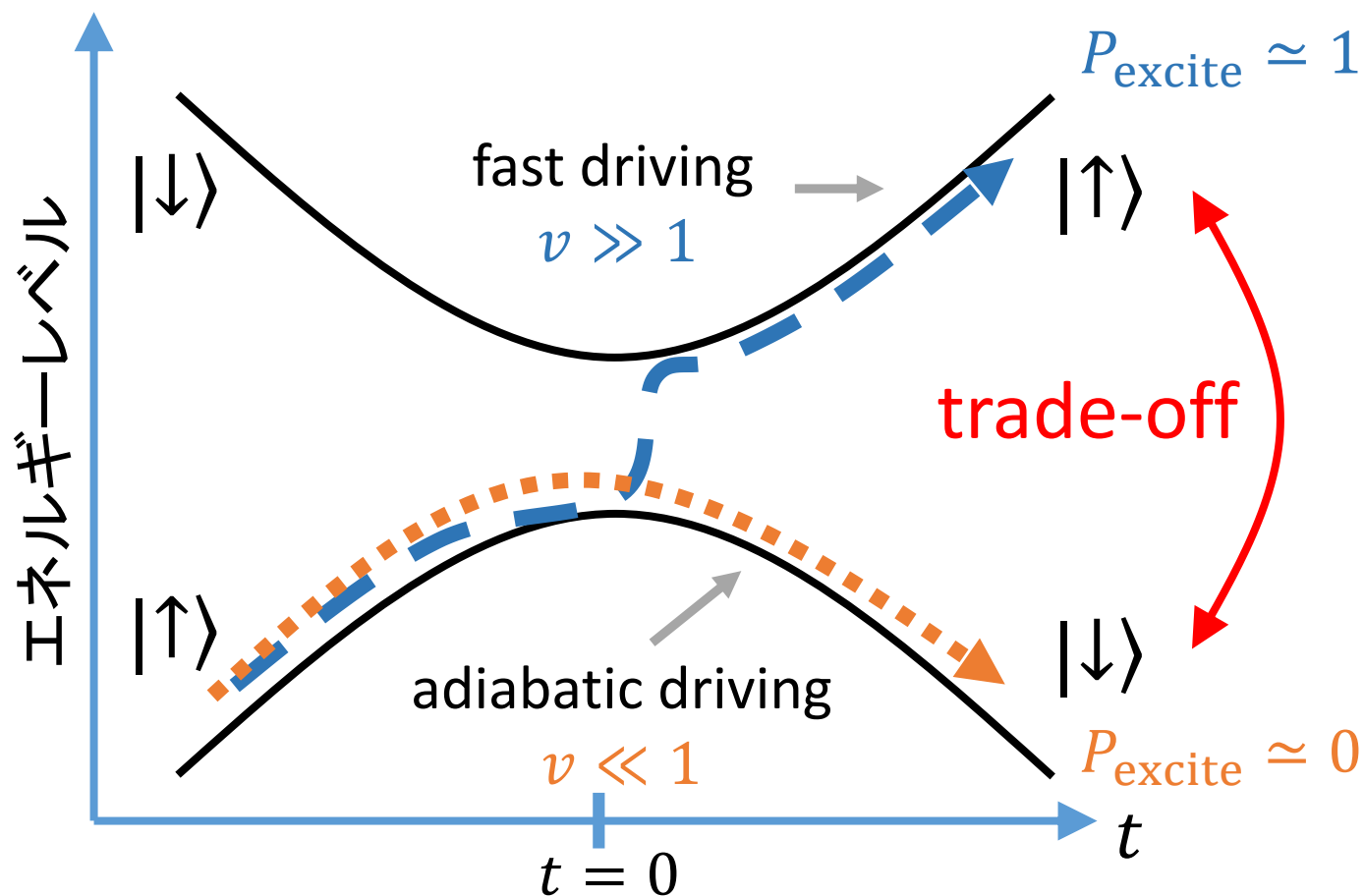
$$H_0(-\infty) \xrightarrow{\text{driving}} H_0(+\infty)$$

Landau-Zener Hamiltonian

$$H_0(t) = \frac{vt}{2} \sigma_z + \frac{\Delta_0}{2} \sigma_x$$

Landau-Zener formula

$$P_{\text{excite}} = 1 - \exp\left(-\frac{\pi\Delta_0^2}{2\hbar v}\right)$$



断熱過程を有限時間でショートカットする手法

- Counter-Diabatic driving -

$H_0(t)$ のエネルギー固有状態 $|n(t)\rangle$ に沿って状態を移動させるジェネレーター $\xi(t)$ を探す：

$$|n(t)\rangle \rightarrow \left(1 + \frac{\delta t}{i\hbar} \xi(t) \right) |n(t)\rangle = e^{i\theta_n} |n(t + \delta t)\rangle + O(\delta t^2)$$

$$\theta_n = i\langle n | \partial_t n \rangle : \text{Berry phase}$$

✓ Counter-Diabatic Hamiltonian [Demirplak&Rice(03), Berry(09)]

$$\xi(t) = i\hbar \sum_n (1 - |n(t)\rangle\langle n(t)|) |\partial_t n(t)\rangle\langle n(t)|$$

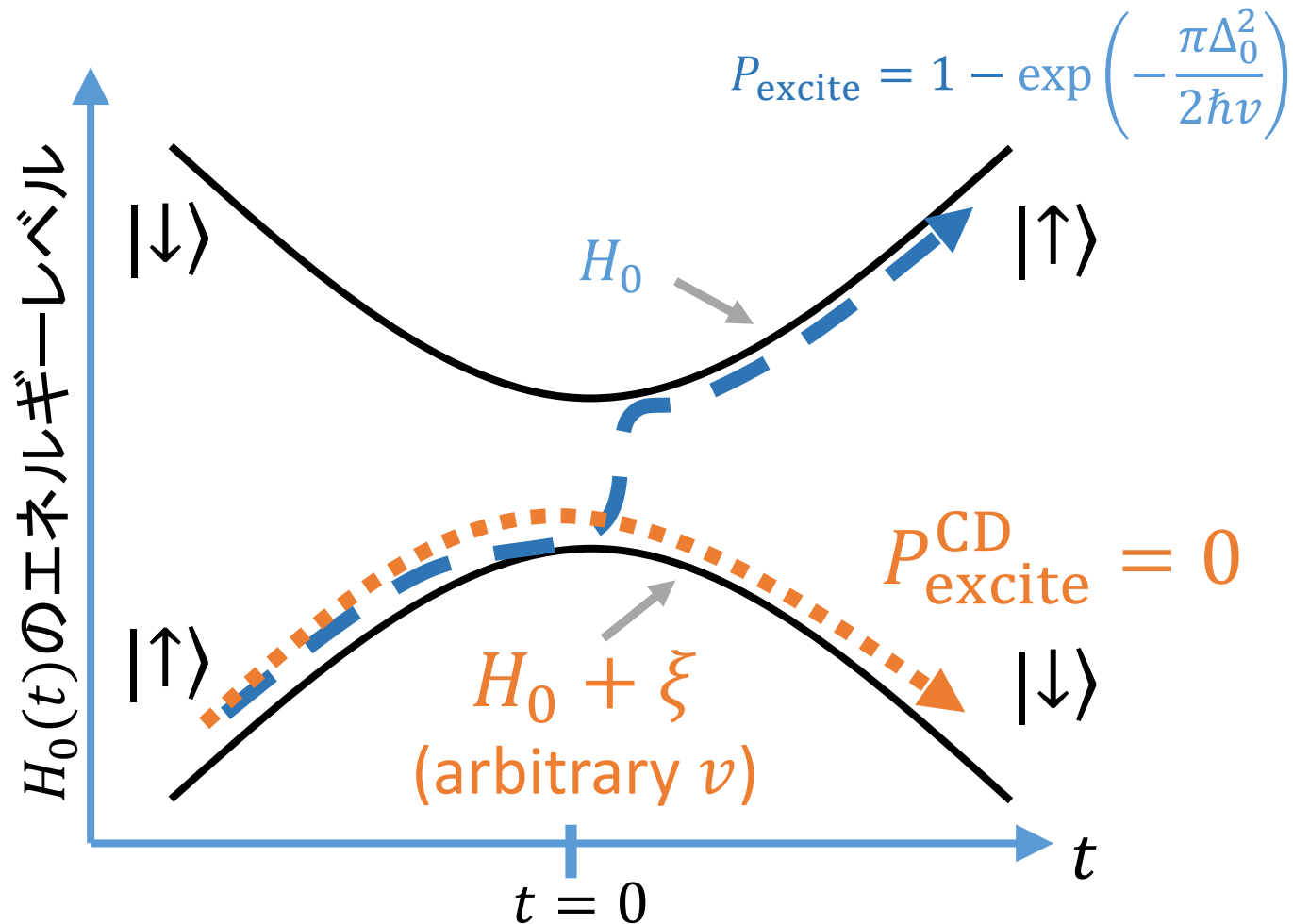
Counter-Diabatic driving – Landau Zener example

original Hamiltonian

$$H_0(t) = \frac{vt}{2} \sigma_z + \frac{\Delta_0}{2} \sigma_x$$

Counter-Diabatic (CD) Hamiltonian

$$\xi(t) = \frac{\hbar \Delta_0 v / 2}{\Delta_0^2 + v^2 t^2} \sigma_y$$



Counter-Diabatic drivingによるスピードアップの限界？

- ✓ 原理的にはCounter-Diabatic drivingで量子断熱発展をいくらでもスピードアップできる
- しかし、(CDに限らず)スピードの物理的限界があるはず
 - Quantum speed limit (量子速度限界)

目次

- 断熱過程のショートカット – Counter-Diabatic Driving –
- 量子速度限界 (Quantum speed limit)
- 最近の進展
 - Counter-Diabatic Drivingのspeed limit
 - 量子開放系のspeed limit

quantum speed limits

- Mandelstam-Tamm bound (1945)

$$\tau \geq \frac{\pi \hbar}{2 \Delta H}$$

エネルギーの標準偏差

- Margolus-Levitin bound (1998)

$$\tau \geq \frac{\pi \hbar}{2 \langle H \rangle - E_g}$$

基底状態を基準としたエネルギーの期待値

エネルギーの不確かさ

- ハイゼンベルクの
時間・エネルギー不確定性関係

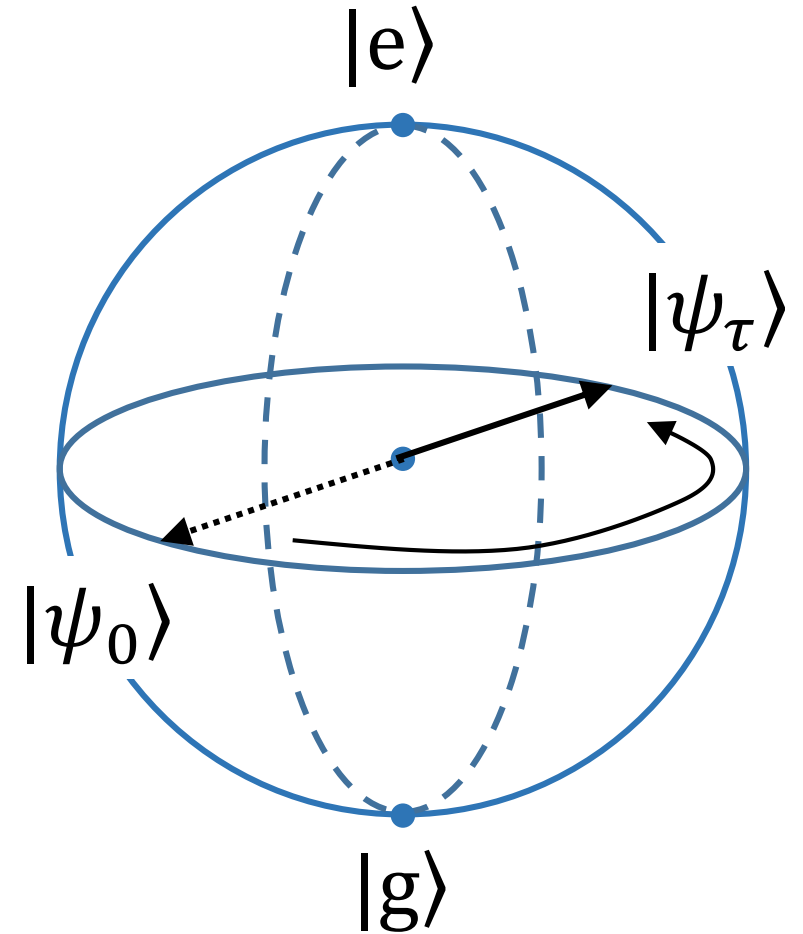
quantum speed limitsの等号成立条件

- 2 準位系を仮定 ($E_e = \hbar\omega, E_g = 0$)

$$\begin{cases} |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle) \\ |\psi_\tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - |e\rangle) \end{cases}$$

最小時間を達成

$$\tau = \frac{\pi\hbar}{\hbar\omega} \quad (\text{MT bound}) \quad (\text{ML bound}) = \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\Delta H} = \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\langle H \rangle}$$



エネルギーゆらぎや期待値が大きいほど状態が速く回転する

等号成立条件と幾何学

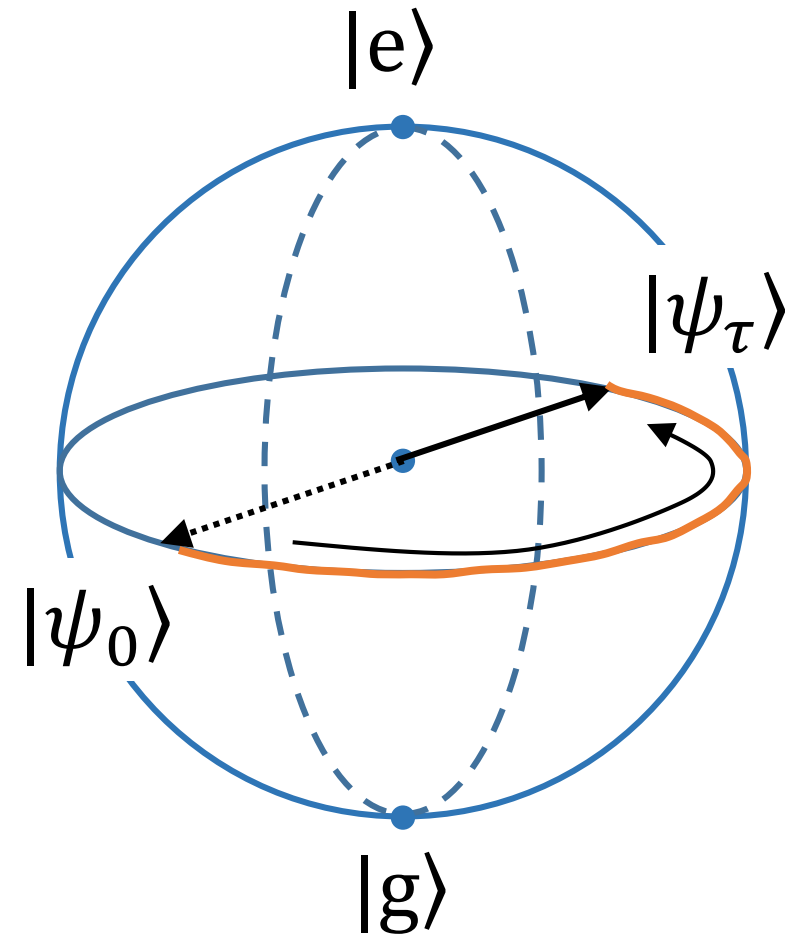
- qubitの状態 → ブロッホ球面上の点

$|\psi_0\rangle$ と $|\psi_\tau\rangle$ の間の最短経路



最小時間を達成

$$\tau = \frac{\pi \hbar}{\hbar \omega} \quad (\text{MT bound}) \quad (\text{ML bound}) = \frac{\pi \hbar}{2 \Delta H} = \frac{\pi \hbar}{2 \langle H \rangle}$$



quantum speed limit と量子状態の幾何学的関係性を示唆

状態間の距離

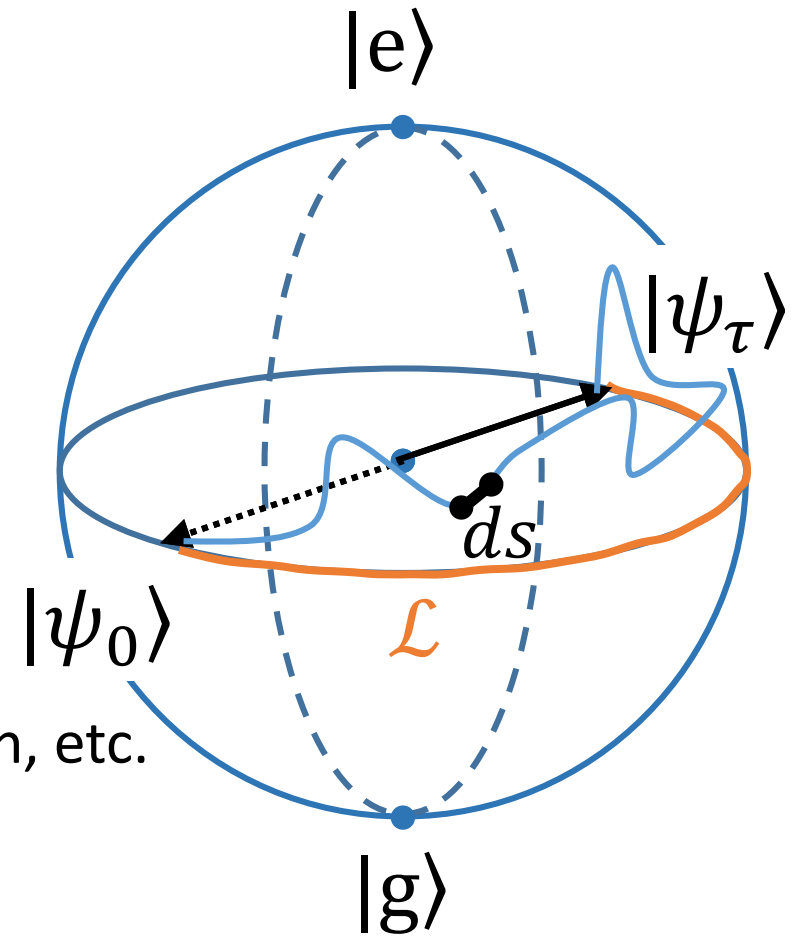
- $|\psi_0\rangle$ と $|\psi_\tau\rangle$ の間の距離 $\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle)$

例 : Bures distance, Trace distance, etc.

- 微小距離 (曲率)

$$ds = \mathcal{L}(|\psi_t\rangle, |\psi_{t+dt}\rangle) = \sqrt{g} dt + O(dt^2)$$

例 : Fubini-Study metric, Quantum Fisher information, etc.



quantum speed limit の幾何学的な意味

$$\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) \leq \int dt \sqrt{g} = \tau \cdot \frac{1}{\tau} \int dt \sqrt{g}$$

↑
最短経路

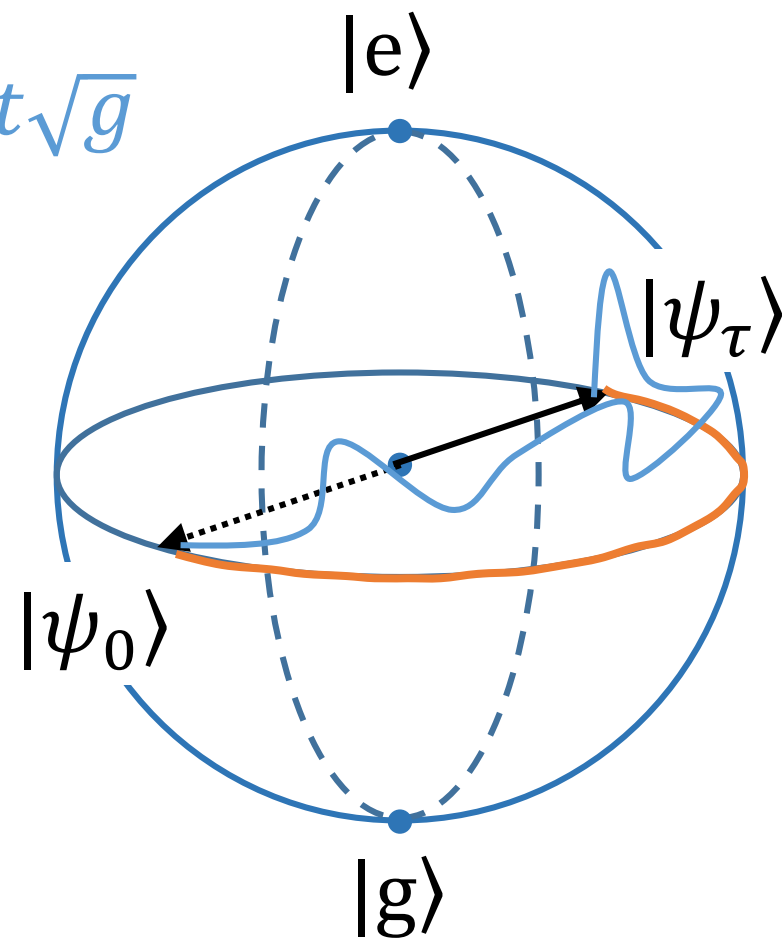
↑
状態が実際に移動
した長さ

||

幾何学的なスピード(の時間積分)

geometric quantum speed limit

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle)}{\langle \sqrt{g} \rangle_\tau}$$

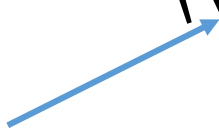


quantum speed limit: 一般の場合

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau)}{\langle \sqrt{g} \rangle_\tau}$$

	距離 $\mathcal{L}$	曲率 g
Bures distance	$\cos^{-1} \langle \phi \psi \rangle $	Fubini-Study metric
	$\cos^{-1} (\text{Tr} [\sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}}])$	quantum Fisher information metric
Trace distance	$\ \rho - \sigma\ _{\text{tr}}$ (trace norm $\ X\ _{\text{tr}} = \frac{1}{2} \text{Tr} X $)	$\sqrt{g} = \ \dot{\rho}\ _{\text{tr}}$

quantum speed limit: 一般の場合

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau)}{\langle \sqrt{g} \rangle_\tau}$$


時間発展のジェネレーター G の情報 (ex. $\sqrt{g} = \|\dot{\rho}\|_{\text{tr}} = \|G[\rho]\|_{\text{tr}}$)

- Schrodinger equation

MT-type quantum speed limit

L. Mandelstam and I. Tamm, *J. Phys.* (1945)

G. N. Fleming, *Nuovo Cimento A* (1973)

J. Anandan and Y. Aharonov, *PRL* (1990)

- Lindblad quantum master equation

speed limit in open systems

A. del Campo, et. al., *PRL* (2013)

M. M. Taddei, et. al., *PRL* (2013)

S. Deffner and E. Lutz, *PRL* (2013)

- Liouville equation, etc.

classical speed limit

S. Deffner, *NJP* (2017)

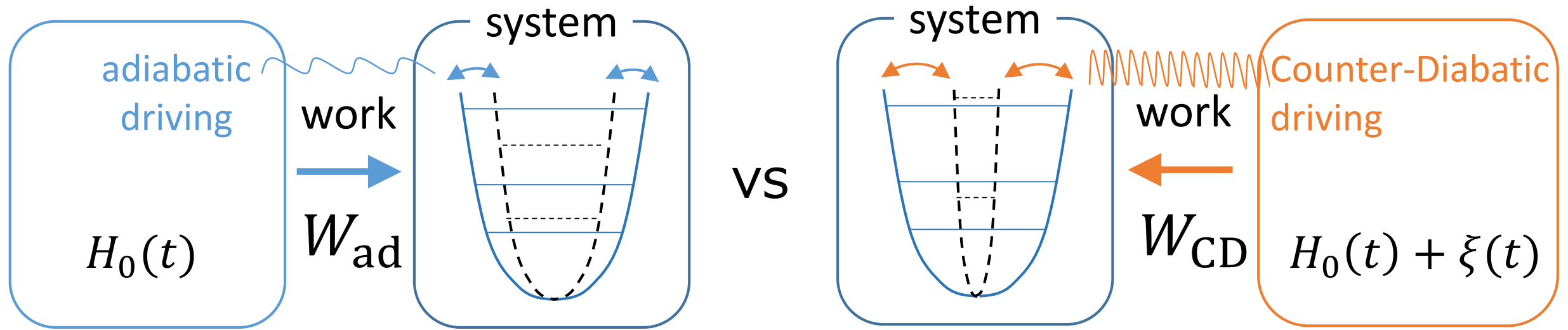
M. Okuyama and M. Ohzeki, *PRL* (2018)

B. Shanahan, et. al., *PRL* (2018)

目次

- 断熱過程のショートカット – Counter-Diabatic Driving –
- 量子速度限界 (Quantum speed limit)
- 最近の進展
 - Counter-Diabatic Drivingのspeed limit
 - 量子開放系のspeed limit

Counter-Diabatic drivingの熱力学的コスト



- ドライブに必要な仕事に注目

J. Kurchan, arXiv:cond-mat/0007360
H. Tasaki, arXiv:cond-mat/0009244

$$W = \Delta E - \cancel{Q} \quad \text{孤立量子系}$$

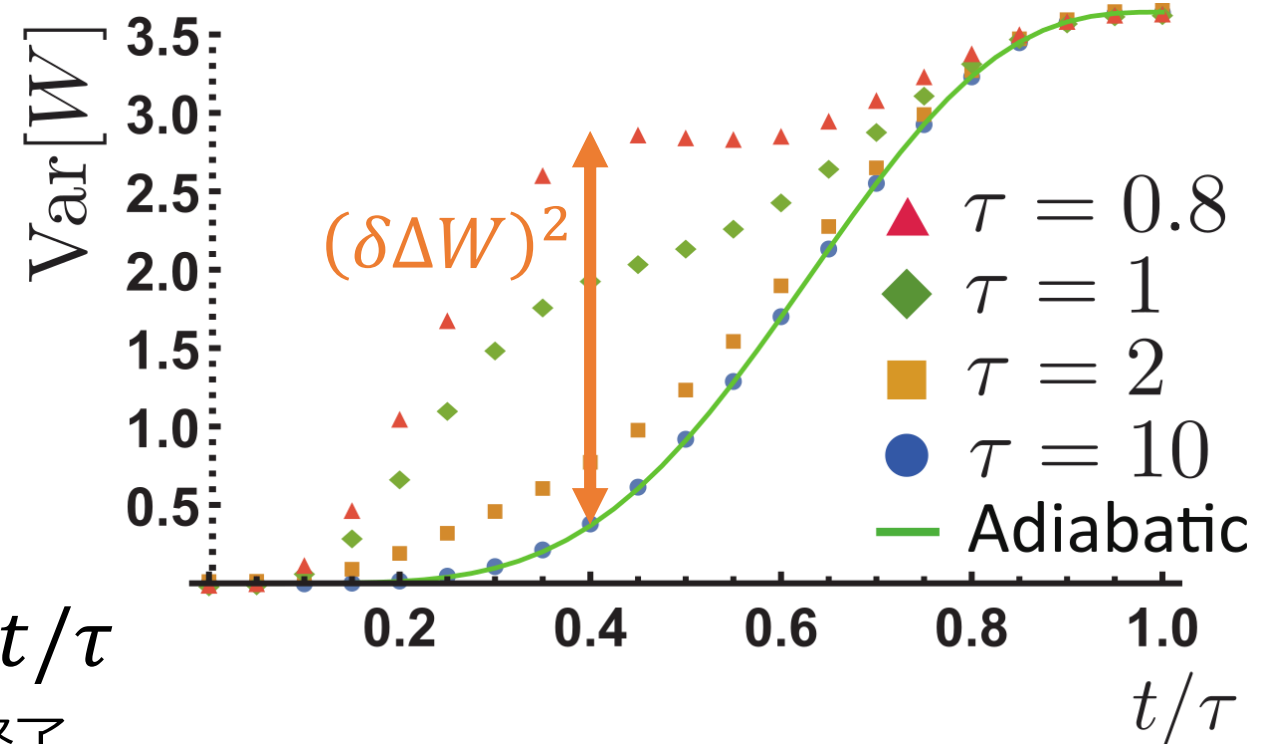
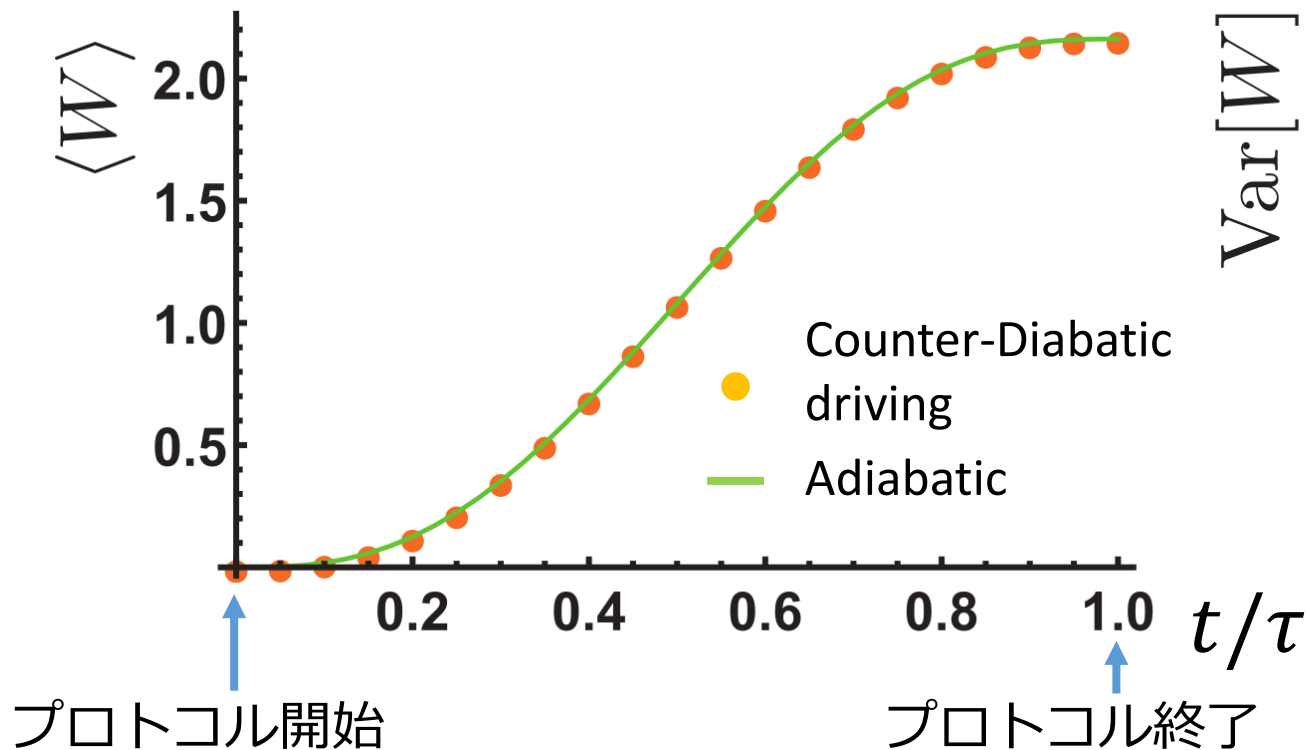
- 仕事の測定 = エネルギーを2回測る “2点測定手法”

Counter-Diabatic drivingの熱力学的コスト

- 仕事の期待値は変化しない
- 仕事ゆらぎはエンハンスされる

$$\langle W(t) \rangle_{\text{CD}} = \langle W(t) \rangle_{\text{ad}}$$

$$\begin{aligned} (\delta\Delta W)^2 &:= \text{Var}[W(t)]_{\text{CD}} - \text{Var}[W(t)]_{\text{ad}} \\ &= \text{幾何学量} \end{aligned}$$



Counter-Diabatic drivingの熱力学的コスト

- 仕事の期待値は変化しない
- 仕事ゆらぎはエンハンスされる

$$\langle W(t) \rangle_{\text{CD}} = \langle W(t) \rangle_{\text{ad}}$$

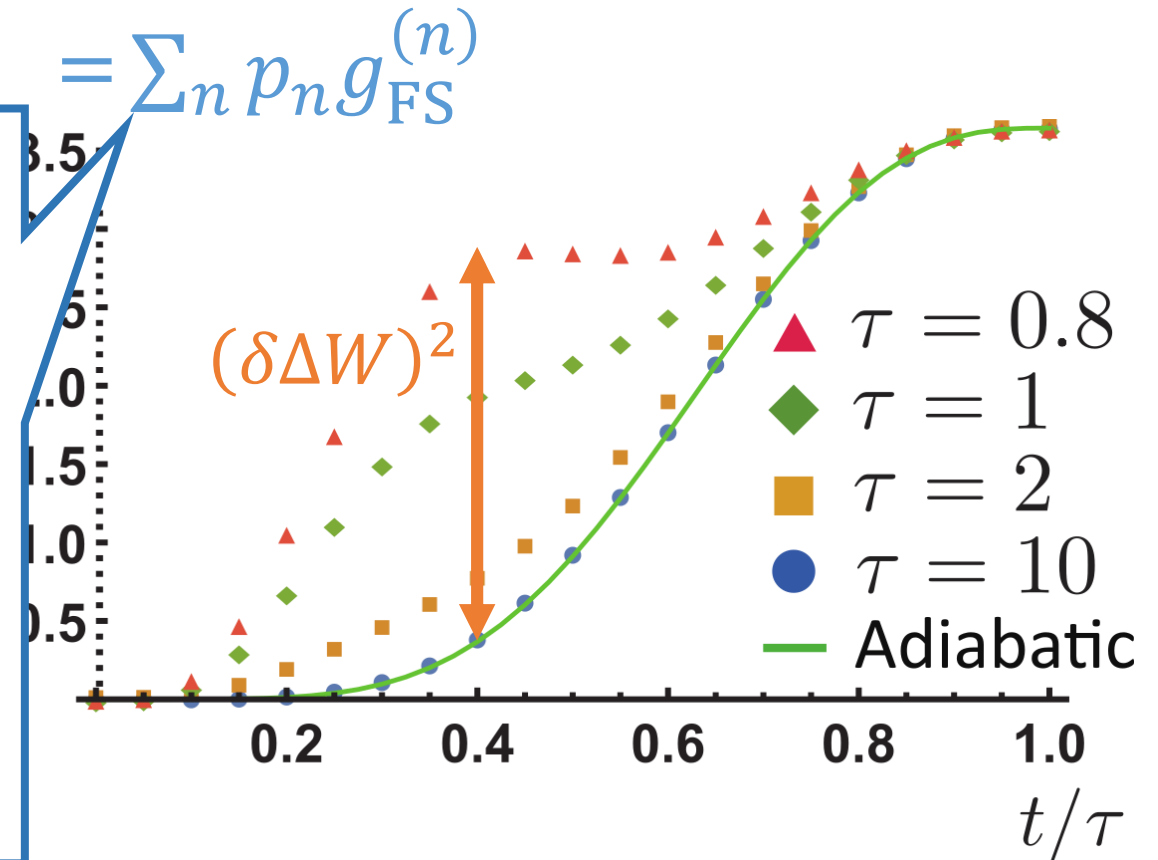
$$\begin{aligned} (\delta \Delta W)^2 &:= \text{Var}[W(t)]_{\text{CD}} - \text{Var}[W(t)]_{\text{ad}} \\ &= \sum_n p_n g_{\text{FS}}^{(n)} \end{aligned}$$

Fubini-Study metric

$$g_{\text{FS}}^{(n)} = \langle \partial_t n | (1 - |n\rangle\langle n|) | \partial_t n \rangle$$



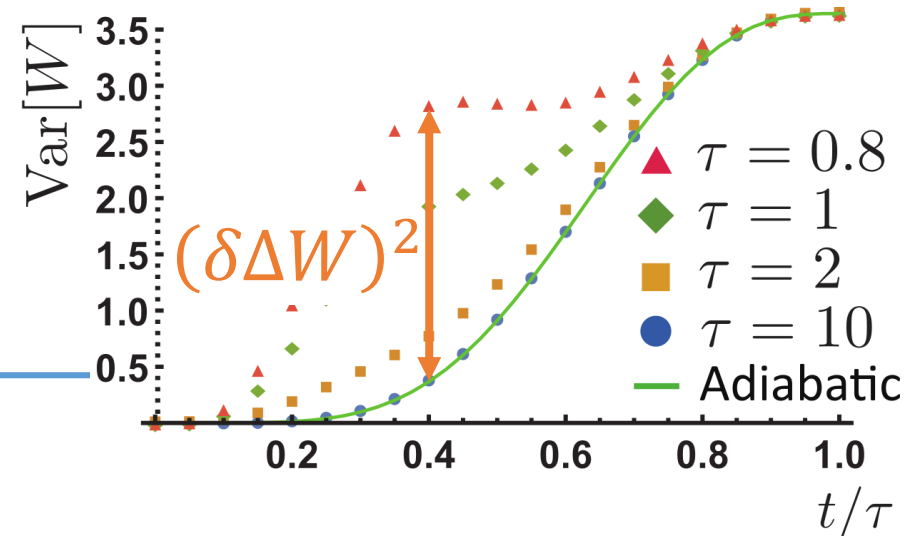
c.f. テンソルの添字がanti-symmetricの場合
→ Berry curvature



quantum speed limit: 一般の場合

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau)}{\langle \sqrt{g} \rangle_\tau}$$

距離 $\mathcal{L}$



$$\cos^{-1} |\langle \phi | \psi \rangle|$$

Bures distance

$$\cos^{-1} (\text{Tr} [\sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}}])$$

quantum Fisher
information metric

Trace distance

$$\|\rho - \sigma\|_{\text{tr}}$$

(trace norm $\|X\|_{\text{tr}}$)

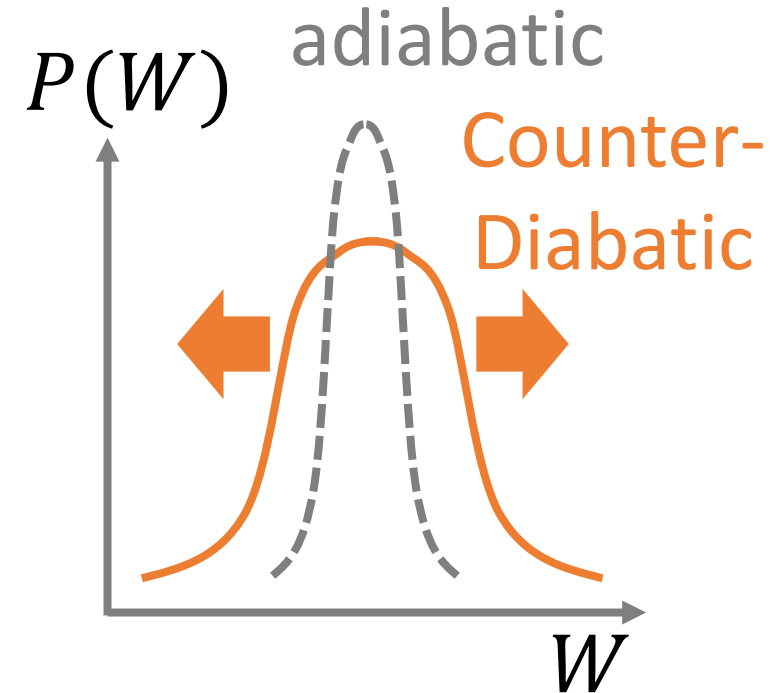
結びつけることが
できる

$$(\delta \Delta W)^2 = \sum_n p_n g_{\text{FS}}^{(n)} \geq g_{\text{QF}}$$

仕事ゆらぎと操作時間の間のトレードオフ関係

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau)}{\langle \delta \Delta W \rangle_\tau}$$

操作時間 $\tau \leftrightarrow$ 仕事ゆらぎ



- Bures distance $\mathcal{L} = \cos^{-1}(\text{Tr}[\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}])$

✓ 超電導量子ビット系で検証 Zhang, et. al., NJP 20, 085001 (2018)

目次

- 断熱過程のショートカット – Counter-Diabatic Driving –
- 量子速度限界 (Quantum speed limit)
- 最近の進展
 - Counter-Diabatic Drivingのspeed limit
 - 量子開放系のspeed limit

量子開放系のspeed limit

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau)}{\langle \sqrt{g} \rangle_\tau}$$

距離

$$\cos^{-1} |\langle \phi |$$

Bures distance

$$\cos^{-1} (\text{Tr} [$$

- Lindblad master equation
物理的な意味がはっきり
している量と結びつける

エネルギー揺らぎ、
エントロピー生成, etc.

g

dy metric

Fisher

information metric

Trace distance

$$\|\rho - \sigma\|_{\text{tr}}$$

$$\sqrt{g} = \|\dot{\rho}\|_{\text{tr}}$$

$$(\text{trace norm } \|X\|_{\text{tr}} = \frac{1}{2} \text{Tr}|X|)$$

幾何学的なスピードと物理的な量の関係

$$\sqrt{g} = \|\dot{\rho}\|_{\text{tr}} \leq \frac{1}{\hbar} \Delta E + \underbrace{\frac{1}{\hbar} \Delta E_D}_{\text{New!}} + \sqrt{\frac{\dot{\sigma} A}{2}}$$

幾何学的なスピード

エネルギーの標準偏差
(孤立量子系のスピード)

量子エントロピー生成率と
アクティビティ
(確率過程のスピード)

Mandelstam and Tamm (1945)

Shiraishi, KF, Saito (2018)
[白石さんの発表]

ΔE_D の物理的意味 - 非断熱状態のジェネレーター

$H_0(t)$ の固有状態 $|n(t)\rangle$ に沿って状態を移動させる：

$$|n(t)\rangle \rightarrow \left(1 + \frac{\delta t}{i\hbar} \xi(t) \right) |n(t)\rangle = e^{i\theta_n} |n(t + \delta t)\rangle + O(\delta t^2)$$

$\theta_n = i\langle n | \partial_t n \rangle$: Berry phase

断熱の場合のジェネレーター： Counter-Diabatic Hamiltonian

$$\begin{aligned} \xi(t) &= i\hbar \sum_n (1 - |n(t)\rangle\langle n(t)|) |\partial_t n(t)\rangle\langle n(t)| \\ &= i\hbar \sum_{n \neq m} \frac{\langle n | \partial_t H | m \rangle}{E_m - E_n} |n\rangle\langle m| \end{aligned}$$

ΔE_D の物理的意味 - 非断熱状態のジェネレーター

$\rho(t)$ の固有状態 $|\psi_n(t)\rangle$ に沿って状態を移動させる：

$$|\psi_n(t)\rangle \rightarrow \left(1 + \frac{\delta t}{i\hbar} \xi(t) \right) |\psi_n(t)\rangle = e^{i\theta_n} |\psi_n(t + \delta t)\rangle + O(\delta t^2)$$

$\theta_n = i\langle\psi_n|\partial_t\psi_n\rangle$: Berry phase

非断熱の場合のジェネレーター

$$\xi(t) = i\hbar \sum_{n \neq m} \frac{\langle\psi_n|\partial_t\rho|\psi_m\rangle}{p_m - p_n} |\psi_n\rangle\langle\psi_m| = H + H_D$$

システムのハミルトニアン

熱浴(ディシペーター $D[\rho]$)
に依存する部分

$$H_D(t) = \sum_{n \neq m} \frac{i\hbar\langle\psi_n|D[\rho]|\psi_m\rangle}{p_m - p_n} |\psi_n\rangle\langle\psi_m|$$

ΔE_D の物理的意味 - 非断熱状態のジェネレーター

$\rho(t)$ の固有状態 $|\psi_n(t)\rangle$ に沿って状態を移動させる：

$$|\psi_n(t)\rangle \rightarrow \left(1 + \frac{\delta t}{i\hbar} \xi(t) \right) |\psi_n(t)\rangle = e^{i\theta_n} |\psi_n(t + \delta t)\rangle + O(\delta t^2)$$

$\theta_n = i\langle\psi_n|\partial_t\psi_n\rangle$: Berry phase

非断熱の場合のジェネレーター

$$\xi(t) = i\hbar \sum_{n \neq m} \frac{\langle\psi_n|\partial_t\rho|\psi_m\rangle}{p_m - p_n} |\psi_n\rangle\langle\psi_m| = H + H_D$$

標準偏差 ΔE ΔE_D

非断熱発展のスピード

量子開放系のspeed limit

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(\rho(0), \rho(\tau))}{\hbar^{-1}\langle\Delta E\rangle_\tau + \hbar^{-1}\langle\Delta E_D\rangle_\tau + \sqrt{\langle\dot{\sigma}\rangle_\tau\langle A\rangle_\tau/2}}$$

エネルギーの
標準偏差

孤立系 ↓

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(\rho(0), \rho(\tau))}{\hbar^{-1}\langle\Delta E\rangle_\tau}$$

Mandelstam and Tamm (1945)

(熱浴による)非断熱
発展のスピード

断熱発展 ↓

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(\rho(0), \rho(\tau))}{\hbar^{-1}\langle\Delta E_{CD}\rangle_\tau + \sqrt{\langle\dot{\sigma}\rangle_\tau\langle A\rangle_\tau/2}}$$

Counter-Diabatic Hamiltonian
のエネルギーの標準偏差

量子エントロピー生成
とアクティビティ

古典系 ↓

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(\rho(0), \rho(\tau))}{\sqrt{\langle\dot{\sigma}\rangle_\tau\langle A\rangle_\tau/2}}$$

Shiraishi, KF, Saito (2018)
[白石さんの発表]

Conclusion

- 断熱過程のショートカット

- quantum speed limit

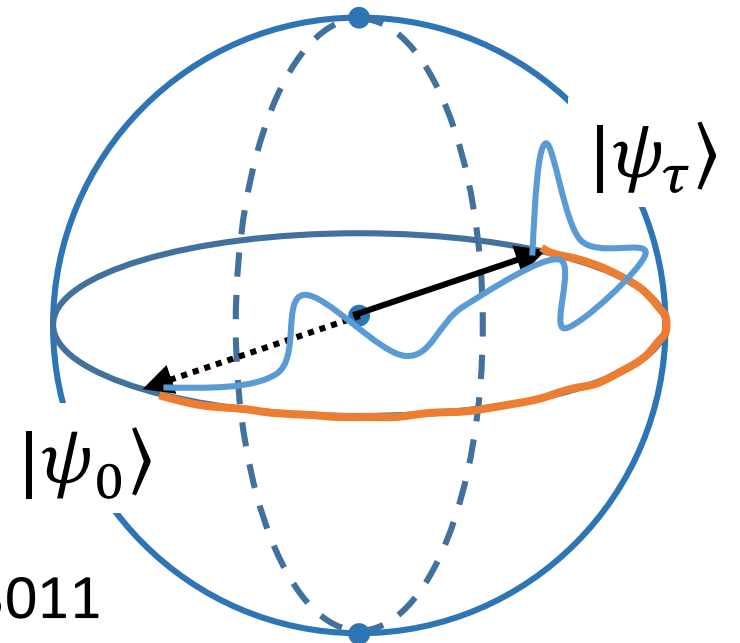
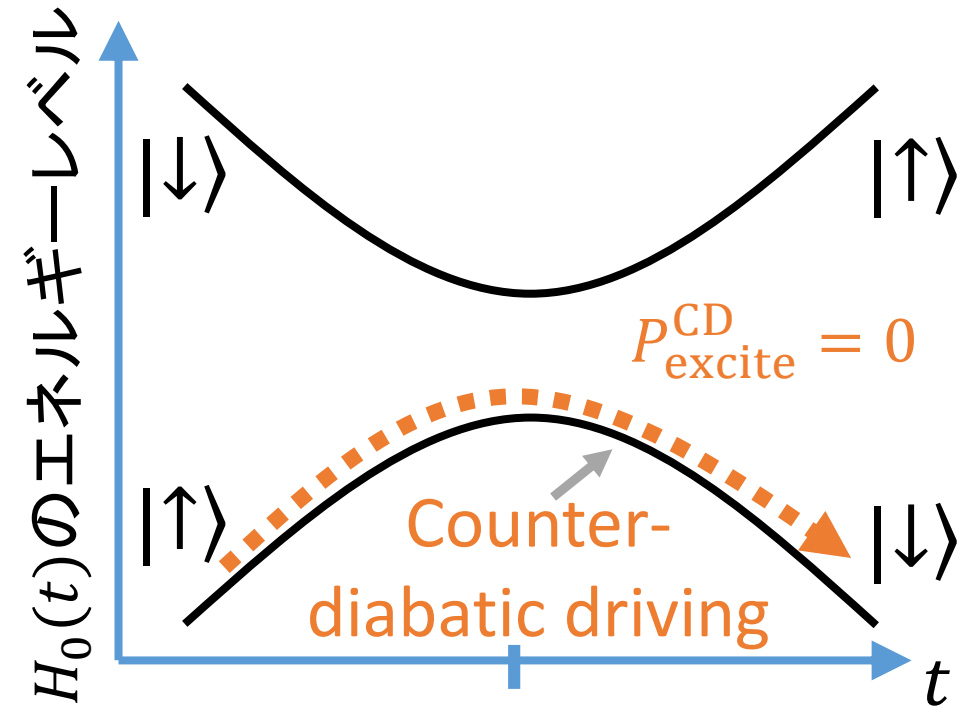
$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}}{\langle \sqrt{g} \rangle_\tau}$$

- Counter-Diabatic Drivingのspeed limit

K. Funo, et al., PRL **118**, 100602 (2017)

- 量子開放系のspeed limit

K. Funo, N. Shiraishi, K. Saito, arXiv:1810.03011



エントロピー生成とアクティビティの定義

エントロピー生成

$$\dot{\sigma} = \dot{S} - \beta \dot{Q} = -\text{Tr}[(\partial_t \rho) \ln \rho] - \beta \text{Tr}[(\partial_t \rho) H]$$

Pauli master equation

$$\dot{p}_n = \langle \psi_n | D[\rho] | \psi_n \rangle = \sum_{m, \omega} (W_{nm}^{\omega} p_m - W_{mn}^{-\omega} p_n)$$

transition rate matrix

$$W_{nm}^{\omega} = \gamma(\omega) |\langle \psi_n | L_{\omega} | \psi_m \rangle|^2$$

density matrix

$$\rho(t) = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

アクティビティ

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n \neq m, \omega} |W_{nm}^{\omega} p_m + W_{mn}^{-\omega} p_n|$$

Counter-Diabatic driving を行った時の仕事

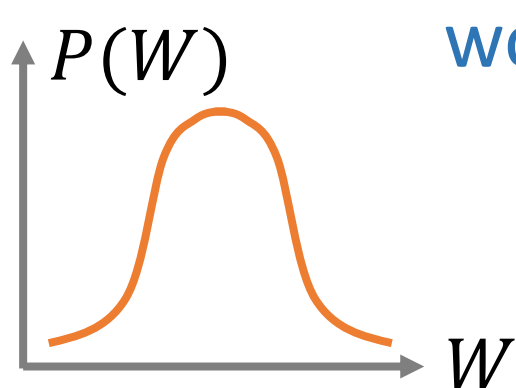
- Two-point energy measurements

$$W_{n \rightarrow k} = \underbrace{E_k(t)}_{\text{eigenenergy of } H_{\text{CD}} = H + \xi \text{ at time } t} - \underbrace{E_n(0)}_{\text{initial energy}}$$

transition probability

$$p_{n \rightarrow k}^t = |\langle E_k(t) | U_t | E_n(0) \rangle|^2$$

initial distribution p_n



work probability distribution

$$P[W(t)]_{\text{CD}} = \sum_{n,k} p_n p_{n \rightarrow k}^t \delta(W(t) - W_{n \rightarrow k})$$